

Утверждаю

Первый проректор СГТУ имени Гагарина Ю.А.,  
профессор А.А. Сытник

2015 г.



## ОТЗЫВ

ведущей организации

ФГБОУ ВО "Саратовский государственный технический  
университет имени Гагарина Ю.А."

на диссертационную работу Романовой Елены Юрьевны

"Метод подобных операторов  
в исследовании оператора Дирака

и дифференциального оператора с инволюцией",

представленную на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный,  
комплексный и функциональный анализ

Спектральная теория дифференциальных операторов является важнейшим разделом общей спектральной теории операторов и занимает видное место как в математических исследованиях, так и приложениях математики к физике. В диссертации изучаются спектральные свойства оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией. Этим операторам посвящены многочисленные статьи и монографии.

Оператор Дирака и оператор с инволюцией можно рассматривать как возмущения дифференциального оператора первого порядка с нулевым потенциалом. Однако при использовании обычных методов для изучения этих операторов возникают затруднения, связанные с рядом причин, например, с тем, что возмущение не является ограниченным оператором. В диссертации в качестве метода исследования выбран метод подобных операторов, берущий свое начало с метода Пуанкаре нормальных форм для обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие метод подобных операторов получил в работах А.Г. Баскакова, который стал использовать технику абстрактного гармонического анализа линейных операторов. Согласно этому методу, исследуемый (возмущенный) оператор преобразуется в подобный оператор, спектральные свойства которого близки к спектральным свойствам невозмущенного оператора. В статье А.Г. Баскакова, А.В. Дербушева, А.О. Щербакова (Известия РАН. Сер. матем. 2011, т.75, №3, с. 3–28.) изучались спектральные свойства оператора Дирака в пространстве  $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$  с потенциалом из  $L_2([0, \pi], \mathbb{C}^2)$ . Однако в этой

статье не затрагивался вопрос о свойствах оператора Дирака в других пространствах. В рецензируемой диссертации исследуется оператор Дирака в лебеговых пространствах. Кроме того, в диссертации метод подобных операторов применяется к дифференциальному оператору с инволюцией.

Из изложенного выше следует, что важность и актуальность вопросов, рассматриваемых в диссертации, не вызывает никаких сомнений. Задачи, поставленные в диссертации, достаточно сложны, а их решение потребовало преодоления ряда математических трудностей.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Во введении обосновывается актуальность поставленной задачи и дается подробный обзор диссертации.

В первой главе приводятся используемые в диссертации известные понятия и результаты из спектральной теории операторов, теории полугрупп, а также определения и основные утверждения метода подобных операторов.

Во второй главе рассматривается оператор Дирака, действующий в одном из банаховых пространств  $L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) или в банаховом пространстве  $C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  и задаваемый различными граничными условиями: периодическими, или антипериодическими, или условиями Дирихле. Строится схема, в которой метод подобия применяется к абстрактным операторам, близким по своим спектральным свойствам к исследуемому оператору Дирака. Установлено, что каждый рассматриваемый оператор подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом. Получена асимптотика спектра и доказана теорема о равносходимости спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов. Изложение во второй главе диссертации, соответствует, в основном, изложению (включая обозначения) вышеупомянутой статьи А.Г. Баскакова, А.В. Дербушева, А.О. Щербакова, где рассматривался случай гильбертова пространства. Однако перенос результатов этой статьи на случай лебеговых пространств не является тривиальным, и, как отмечалось выше, автору пришлось преодолевать существенные математические сложности.

В третьей главе рассматривается дифференциальный оператор с инволюцией  $L : D(L) \subset L_2([0, \omega], \mathbb{C}_m) \rightarrow L_2([0, \omega], \mathbb{C}_m)$ , задаваемый на отрезке  $[0, \omega]$  дифференциальным выражением  $l(y) = y'(x) - Q(x)y(\omega - x)$  и периодическими краевыми условиями. Предлагается абстрактная схема применения метода подобных операторов для операторов, близких к дифференциальному оператору с инволюцией. Эта схема применяется к изучаемому оператору с инволюцией. Устанавливается, что дифференциальный оператор с инволюцией подобен оператору, являющемуся прямой суммой операторов с конечным рангом. Исследуется спектр оператора с инволюцией, в

частности, получена получена асимптотика спектра и доказана равносходимость спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов. Кроме того, установлено асимптотическое представление группы операторов, порожденной изучаемым оператором.

Все утверждения диссертации сопровождаются полными и подробными доказательствами. Все необходимые сведения, используемые в диссертации, сопровождаются ссылками на соответствующие источники, причем большая часть этих сведений приведена в самой диссертации. Таким образом, все утверждения диссертации являются полностью обоснованными и достоверными.

Все утверждения диссертации, выносимые на защиту, являются новыми. Диссертация выполнена на высоком научном уровне. Нет сомнений в том, что ее результаты будут использованы математиками, проводящими свои исследования в спектральной теории операторов. Эти результаты могут также найти применение в прикладных работах для построения математических моделей, использующих спектральную теорию дифференциальных операторов. Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях по спектральной теории, проводимых в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Санкт-Петербургском государственном университете, Воронежском государственном университете, Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского, Саратовском государственном техническом университете имени Гагарина Ю.А., Белгородском государственном национальном исследовательском университете и других научных учреждениях.

Основные результаты диссертации своевременно опубликованы в четырнадцати работах, причем четыре статьи опубликованы в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК. Кроме того, результаты диссертации неоднократно докладывались на различных конференциях, в том числе, имеющих международный статус.

Автореферат диссертации достаточно полно и правильно отражает ее содержание. Диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отметим некоторые замечания по материалам диссертации.

1. На стр. 5 и 41 вводится обозначение " $C_b = C_b([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$  – банахово пространство непрерывных и ограниченных функций на отрезке  $[0, 2\pi]$  и со значениями в  $\mathbb{C}^2$ ." Известно, что всякая непрерывная на отрезке функция ограничена.

2. В теореме 1.5 на стр. 30, 31 утверждается, что если  $A$  – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$ , то сильно непрерывная

группа  $\{T(t)\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , изометрических операторов, порожденная оператором  $iA$ , допускает представление  $T(t)x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t} P_n x$ , где  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\lambda_n$  – собственные значения оператора  $A$ ,  $P_n$  – соответствующие проекторы Рисса. Здесь пропущено требование об отсутствии у оператора  $A$  непрерывного спектра.

3. На стр. 40 вводится пространство  $L_p = L_p([0, 2\pi], \mathbb{C}^2)$ , как состоящее из суммируемых со степенью  $p$  функций, для которых конечна величина  $\|y\|_p$  (далее следует определение нормы). Известно, что суммируемость предполагает конечность этой величины.

4. На стр. 68 вводится самосопряженный оператор  $A$  с компактной решельвентой и предполагается, что оператор  $iA$  является генератором группы изометрий, для которой имеет место спектральное представление, отмеченное выше в замечании 2. Это предположение излишне, так как оно следует из теоремы Стоуна и компактности резольвенты.

Перечисленные замечания не снижают научной ценности диссертации.

Таким образом, диссертационная работа Романовой Елены Юрьевны "Метод подобных операторов в исследовании оператора Дирака и дифференциального оператора с инволюцией" является законченной научно-квалификационной работой, содержащей решение задач, имеющих существенное значение для функционального анализа. Работа Е.Ю. Романовой удовлетворяет всем требованиям п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней", утвержденного Постановлением Правительства РФ, которые предъявляются к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук. Автор, Романова Елена Юрьевна, несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры "Математика и моделирование" Саратовского государственного технического университета имени Гагарина Ю.А. "02" октября 2015 г., протокол № 3.

Заведующий кафедрой "Математика и моделирование",  
доктор технических наук, профессор *Крысько* В.А. Крысько

Профессор кафедры "Математика и моделирование",  
доктор физико-математических наук, доцент *Брук* В.М. Брук

Адрес: 410054, Саратов, Политехническая, 77. Телефон: (8452)998764

*Будьши Преско  
Зверен.*



*Бруди, В. М.*

Тарасова Т.А.